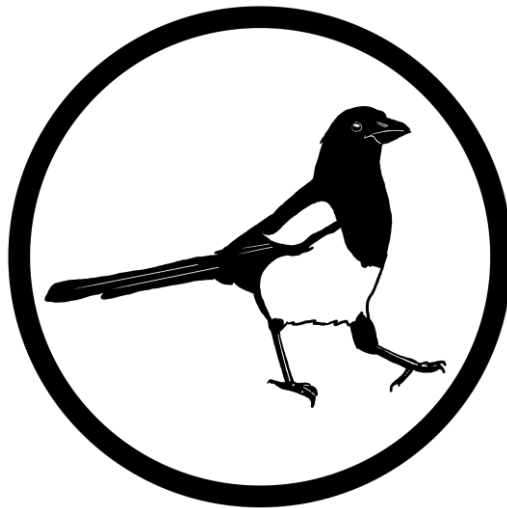


# Den ultimate guiden til GeoGebra P-matte

## Innholdsfortegnelse:

- Intro
- 1. Tegne grafen
- 2. Tegne grafen mellom to x-verdier
- 3. Regresjon
- 4. Finne en y-verdi når du får oppgitt en x-verdi, og motsatt
- 5. Finne ut når er y-verdiene over/under et visst nivå
- 6. Momentan vekstfart
- 7. Gjennomsnittlig vekstfart
- 8. Toppunkt og bunnpunkt
- 9. Nullpunkter
- 10. Statistisk analyse (2P)



**Privatisteksamen.com**  
**2024**



## Intro

La oss si at vi får presentert funksjonen  $f(x) = 0.5x^3 - 5x^2 + 12x + 15$  på eksamen, og la oss si at dette er en funksjon som viser sammenhengen mellom x timer etter midnatt og temperaturen ute i grader Celsius.

Denne guiden vil ta for seg hva de kan spørre om i forbindelse med en slik oppgave på eksamen.

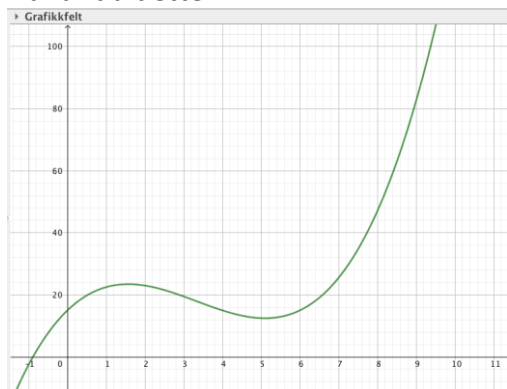
*OBS: Mellom hvert steg jeg viser i denne guiden vil jeg fjerne det jeg gjorde fra forrige punkt. Kun det jeg tegner i punkt to vil stå igjen for hvert steg.*

## 1. Tegne grafen

Det enkleste de vil be om er at du tegner grafen. Alt du behøver å gjøre da er å skrive av funksjonen i "Skriv inn"-feltet i GeoGebra:

Skriv inn:  $f(x) = 0.5x^3 - 5x^2 + 12x + 15$

Da får du dette:



## 2. Tegne grafen mellom to x-verdier (det er som oftest denne måten du skal tegne grafer på, på eksamen)

Hvis det står følgende en eller annen plass i oppgaveteksten:  $0 \leq x \leq 7$ , så betyr det at du skal tegne funksjonen kun mellom de to verdiene som er oppgitt, og dette lesere vi som at funksjonen skal tegnes fra x-verdien 0 til x-verdien 7.

I dette tilfellet skal du bruke kommandoen *Funksjon*( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> ).

Tips: Ønsker du nå å kalle funksjonen noe, for eksempel  $f(x)$ , slik som navnet er gitt i oppgaven, så skriver du det først.

Da skriver du inn følgende:

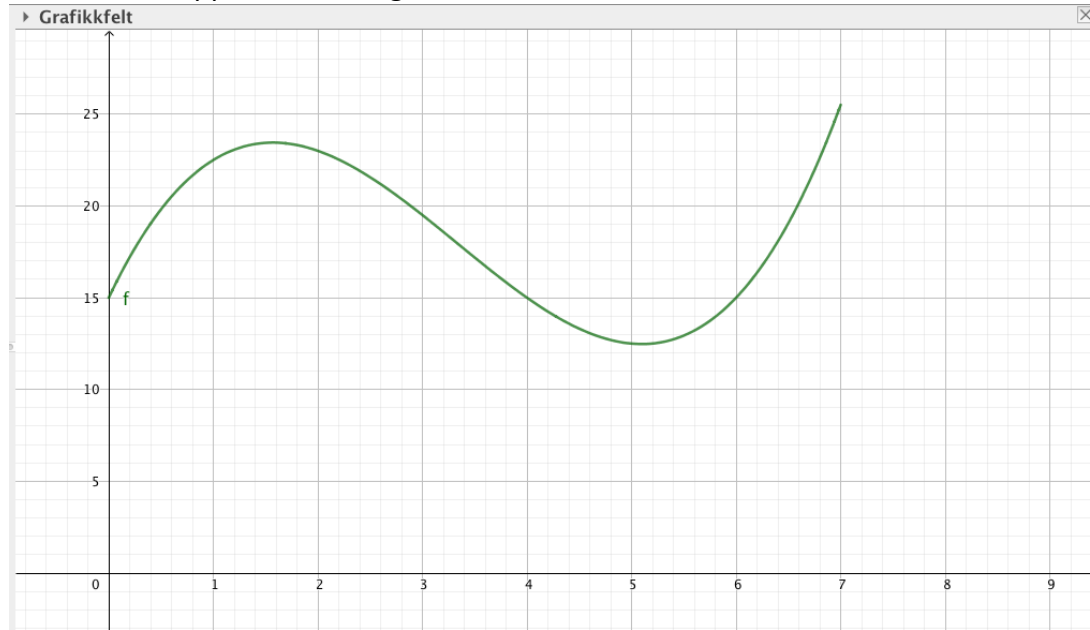
Skriv inn:  $f(x) = \text{Funksjon}(0.5x^3 - 5x^2 + 12x + 15, 0, 7)$

Start-verdi

Slutt-verdi



Da ender du opp med å få følgende:



### 3. Regresjon (Vis at dette er en god modell ut ifra en tilhørende tabell)

Av og til står det at vi skal enten bruke regresjon eller så står det bare at vi skal vise at funksjonen vår er en god modell for noen punkter/verdier som er oppgitt i en tabell.

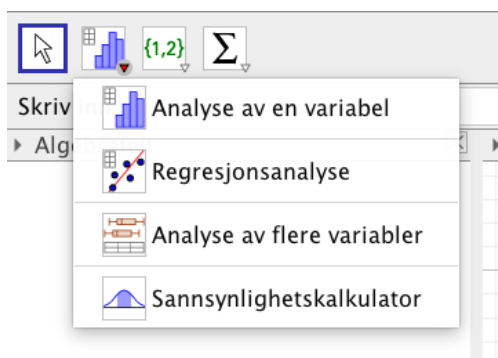
La oss for eksempel si at vi fikk oppgitt følgende tabell, og at vi skulle vise at modellen vår  $f(x)$  passer godt med de verdiene:

Timer etter midnatt (x)	0	1	2	3	4	5	6
Temperatur f(x)	15	22,5	23	19,5	15	12,5	15

1. Start med å åpne regnearket i GeoGebra, dette gjør du ved å trykke på "Vis" og "Regneark".
2. Skriv inn punktene i GeoGebra (MEN; snu rundt på tabellen slik at du fører opp x- og y-verdiene loddrett og ikke horisontalt) og husk; punktum og ikke komma. Da skal du føre det opp som på bildet til høyre.
3. Deretter markerer du alle verdiene i regnearket.
4. Klikk på pilen nederst i høyre hjørne til den andre verktøyfanen øverst til venstre i bildet. Der velger du deretter "Regresjonsanalyse" (som du ser på bildet på neste side).

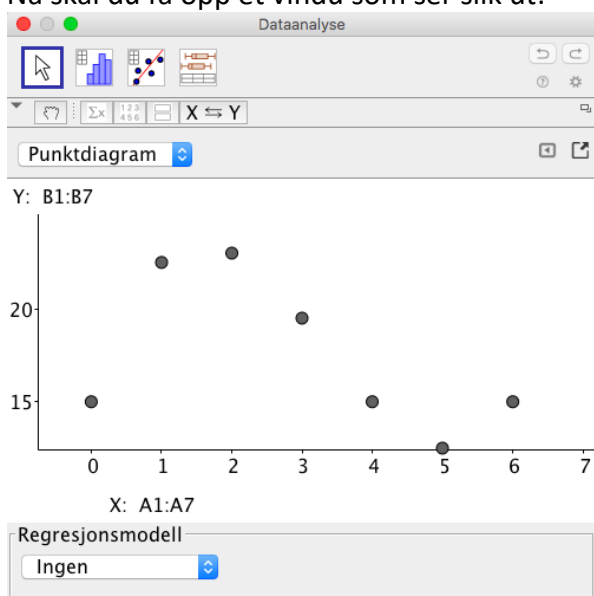
	A	B
1	0	15
2	1	22.5
3	2	23
4	3	19.5
5	4	15
6	5	12.5
7	6	15





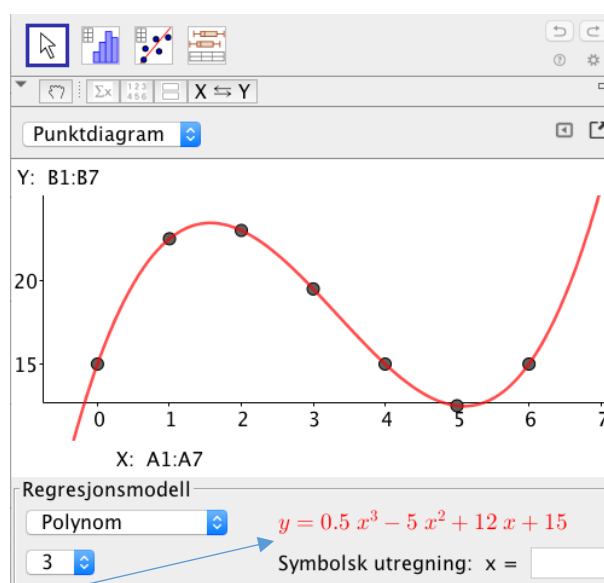
5. I første vindu som dukker opp, så klikker du bare "Analyser".

6. Nå skal du få opp et vindu som ser slik ut:



7. Nå skal du velge korrekt regresjonsmodell, og hvilken du skal bruke er avhengig av hvilken funksjon (som ble oppgitt i oppgaveteksten, i dette tilfellet ved navnet  $f(x)$  som du ser øverst) du skal vise at punktene passer til. Hvis du ikke kjenner igjen hva slags funksjon det er kan du enten sammenligne med funksjonene som står i kap. 5.7 i 2P-boka eller så må du prøve deg fram med ulike.

Uansett, jeg ser at funksjonen jeg har oppgitt,  $f(x)$ , er en polynomfunksjon av tredje grad, så jeg velger "Polynom" og av 3. grad i GeoGebra, og ser da at jeg får et funksjonsuttrykk som er likt  $f(x)$  som jeg fikk oppgitt i oppgaveteksten (bildet til høyre):

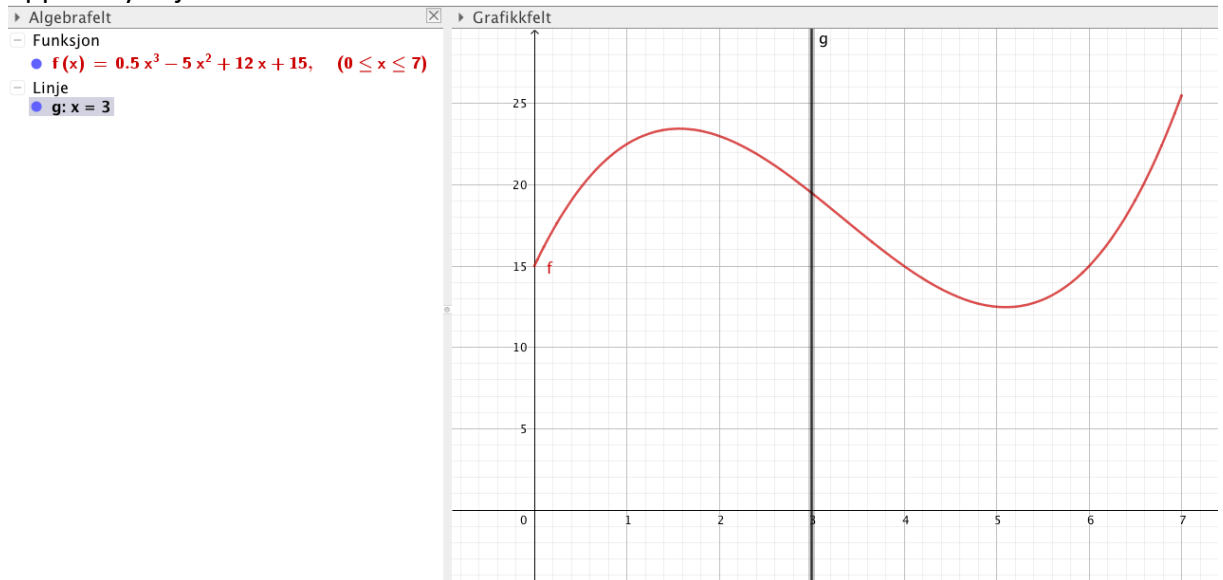


#### 4. Finne en y-verdi når du får oppgitt en x-verdi eller motsatt, finn en x-verdi når du får oppgitt en y-verdi

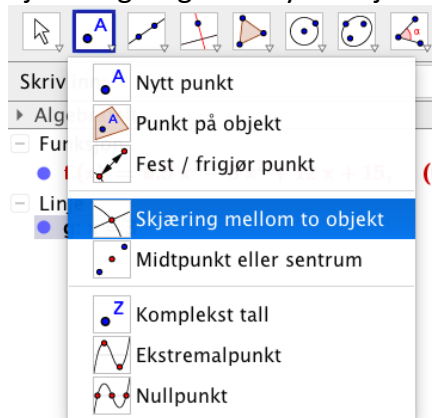
Veldig ofte så får man spørsmål som: "Hva er temperaturen kl. 3 i følge modellen?", da må du se i oppgaveteksten at timer er x-verdiene våre. Det betyr at du har fått oppgitt en x-verdi og skal finne en y-verdi.

Da skal du gjøre følgende:

1. Skriv inn  $x=3$  (siden kl. 3 er tre timer etter midnatt) i "Skriv inn"-feltet, og da får du opp en ny linje i GeoGebra:



2. Gå øverst til venstre på andre verktøyfane, klikk på den lille pilen nederst i høyre hjørne og velg verktøyet "Skjæring mellom to objekt":



3. Klikk deretter først på funksjonen i GeoGebra og deretter den nye linjen du tegnet (i denne oppgaven  $x=3$ -linjen), da får du et nytt punkt som dukker opp både i algebrafeltet og grafikkfeltet:

**Punkt**  
●  $A = (3, 19.5)$

I dette tilfellet het punktet mitt A. Punkter har alltid en x- og en y-verdi (x,y). Når vi leter etter en y-verdi vil det være verdien som står etter komma, 19.5 i dette tilfellet,



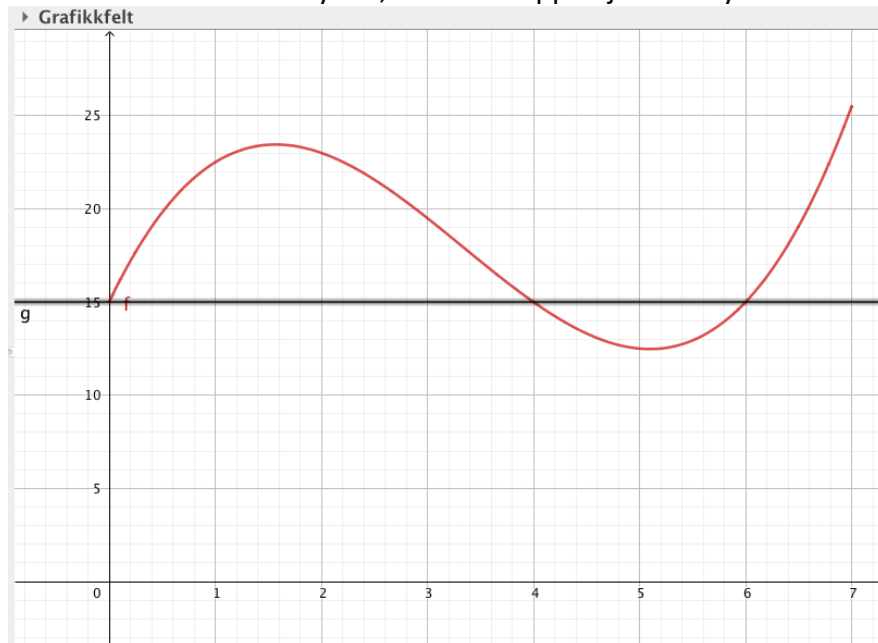
noe som betyr at kl. 3 på natten vil temperaturen være 19,5 grader.

På eksamen kan de spørre andre veien, altså at de oppgir en y-verdi og spør etter tilhørende x-verdi. Da skal du gjøre akkurat samme, bortsett ifra at du skriver y=den verdien de oppgir i oppgaveteksten, og deretter følger du de samme stegene, men leser av x-verdien til det punktet (x,y) du får.

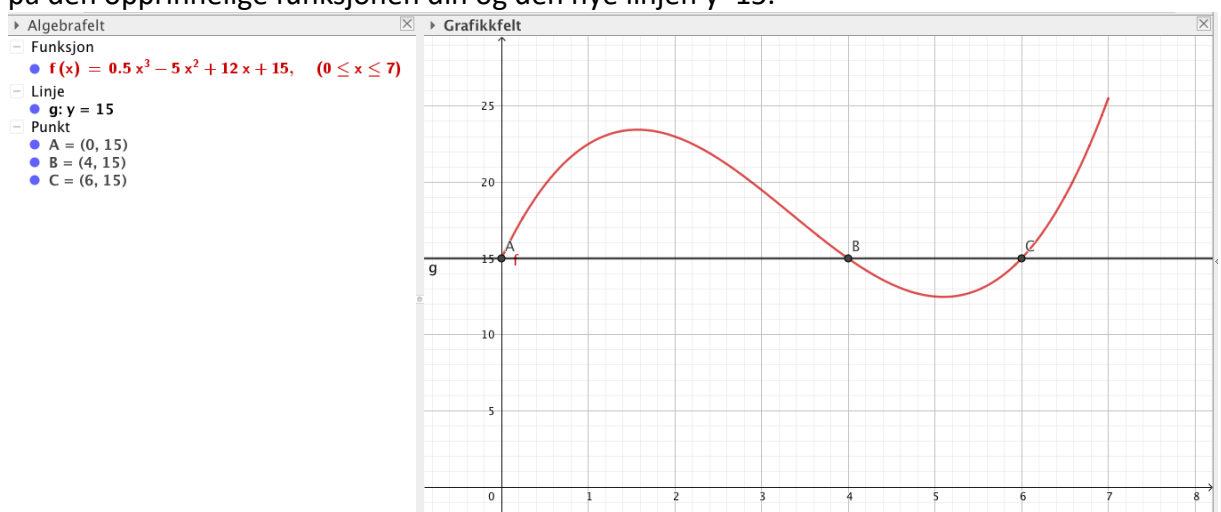
### 5. Finne ut når er y-verdiene over/under et visst nivå

La oss si at oppgaven spør: "Når er temperaturen under 15 grader?". Da må du huske at temperaturen er y-verdiene vår i denne oppgaven. Deretter gjør du følgende:

1. Skriv i "Skriv inn"-feltet  $y=15$ , da får du opp linjen hvor y-verdien er lik 15:



2. Deretter velger du nok en gang skjøring mellom to objekt (slik som i del 4) og klikker på den opprinnelige funksjonen din og den nye linjen  $y=15$ .



Da ser du ut ifra bildet at du får tre punkter, men vi er ikke interessert i punkt A, da temperaturen bare øker fra dette punktet. Vi er kun interessert i B og C, for mellom disse verdiene er temperaturen under 15 grader.



3. Leser du av x-verdiene til punktene B og C, så ser vi at B sin x-verdi er 4 og C sin 6. Altså er temperaturen lavere enn 15 grader mellom klokken 4 og 6.

Bonus: Hadde de spurt om hvor lenge temperaturen var under 15 grader, måtte vi tatt differansen mellom de to klokkeslettene (6 og 4), som gir svaret 2 timer. Altså var temperaturen under 15 grader i 2 timer.

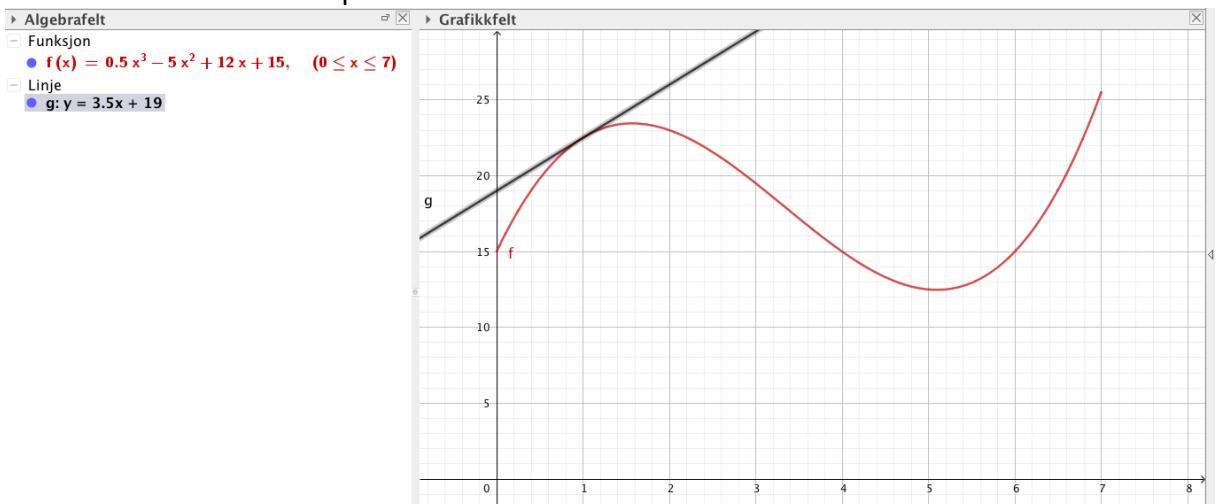
## 6. Momentan vekstfart (eller vekstfarten i et bestemt punkt)

Spør de etter momentan vekstfart eller veksten i et bestemt punkt eller tidspunkt, i vårt eksempel når klokken er ett, skal du gjøre følgende:

1. Du skal nå bruke kommandoen "Tangent( <Punkt>, <Funksjon> )"
  - a. "Punkt" er punktet eller verdien du skal finne momentan vekstfart i, i vårt eksempel 1
  - b. "Funksjon" er navnet på den funksjonen vi ønsker å finne momentan vekstfart i, her må du se hva du har kalt funksjonen din i GeoGebra. I vårt eksempel heter funksjonen f (da det står  $f(x)$  i algebrafeltet i GeoGebra)
2. Fyll inn i kommandoen:  
I vårt eksempel:

Skriv inn: `Tangent(1, f)`

3. Da får du en lineær (rett) funksjon opp i GeoGebra, som vil være på formen  $y=ax+b$ , hvor da tallet a, det som står ganget med x, er stigningstallet og dermed den momentane vekstfarten i punktet hvor  $x=1$ .



Så i dette tilfellet er den momentane vekstfarten 3,5 som betyr at temperaturen øker med 3,5 grader pr time akkurat kl. ett.

## 7. Gjennomsnittlig vekst/reduksjon

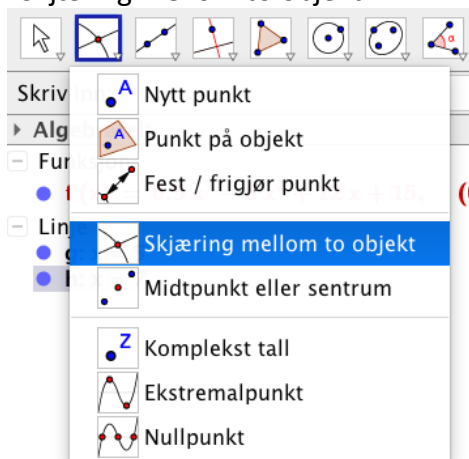
Hvis du skal finne gjennomsnittlig vekst eller reduksjon for en funksjon blir du bedt om å finne veksten mellom to verdier, og de to verdien vil være to x-verdier. For vårt eksempel, la oss si vi skal finne gjennomsnittlig vekst mellom kl. 5 og 7, noe som vil tilsvare x-verdiene 5 og 7. Da skal du gjøre følgende:

1. Start med å skrive inn de to x-verdiene du får oppgitt, i vårt tilfelle  $x=5$  og  $x=7$  i "Skriv inn"-feltet.  
Da får du to linjer, slik som du vil se på bildet på neste side.





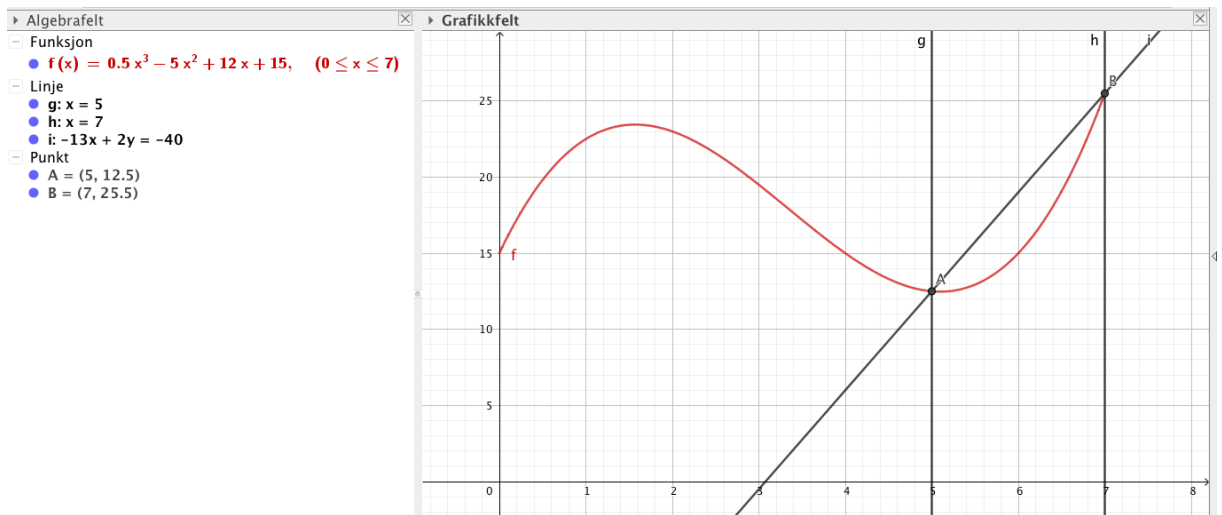
2. Klikk deretter på pilen nederst i høyre hjørne av den andre verktøysfanen, og velg "Skjæring mellom to objekt".



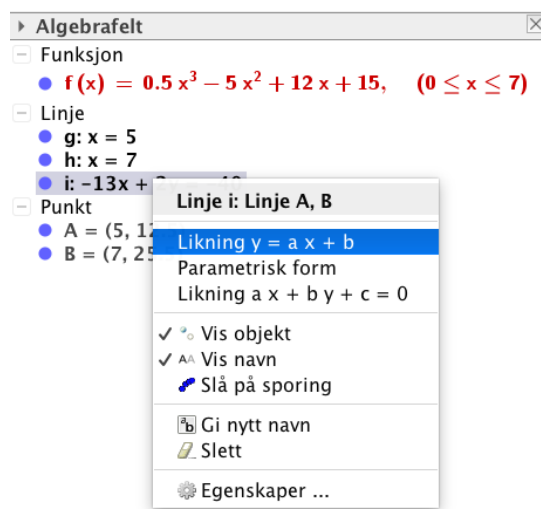
3. Klikk så først på grafen til funksjonen ( $f(x)$ ) og deretter den første loddrette linjen ( $x=5$ ), slik at du får et nytt punkt, deretter gjentar du og klikker først på grafen til funksjonen ( $f(x)$ ) og deretter på den andre loddrette linjen ( $x=7$ ), slik at du får et andre punkt.
4. Når du har fått begge punktene på grafen går du til tredje verktøysfane og velger verktøyet "Linje" (**ikke** velg noen av de andre du finner der), for deretter å klikke på hvert av de to punktene du laget i steg 3. Da skal du få den rette linjen mellom de to punktene, slik som dette:







5. Da vil du se at det også har dukket opp en ny funksjon til en linje i algebrafeltet til venstre, som i dette tilfellet heter i. Den har funksjonen til en rett linje, bare at den er skrevet på en litt ukjent måte for oss og ikke den tradisjonelle  $y=ax+b$  formen som vi kjenner til (OBS!: Har du endret på innstillingene dine i GeoGebra, slik jeg har bedt dere om å gjøre, og linjen faktisk dukker opp på riktig form så overse det jeg sier nå). Da må du høyreklikke på funksjonen til linjen og velge "Likning  $y=ax+b$ ", slik som på bildet til høyre:



6. Da vil du få funksjonen til den nye linjen (i) på vanlig form og vi kan nå lese av stigningstallet til linjen, og da ser vi at stigningstallet (tallet foran x) er 6,5. Med andre ord har vi en gjennomsnittlig stigning mellom de to x-verdiene, i vår oppgave 5 og 7, på 6,5 pr x-verdi. Altså stiger temperaturen i gjennomsnitt med 6,5 grader pr time mellom klokken 5 og 7.

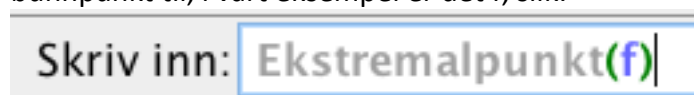
Linjen på riktig form i GeoGebra:

● **i:  $y = 6.5x - 20$**

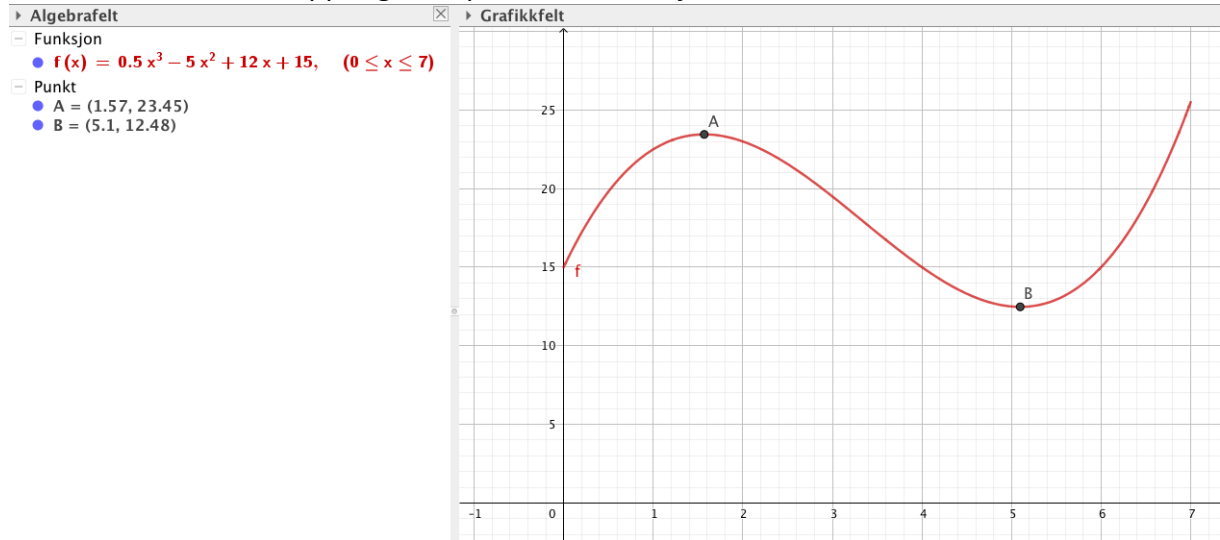
### 8. Topp og bunnpunkt

Blir du spurt om største eller minste verdi til en funksjon på eksamen så er det toppunkt eller bunnpunkt til funksjonen din du skal finne. Dette gjør du med en enkel kommando i GeoGebra.

Alt du behøver å gjøre er å skrive inn "Ekstremalpunkt(<Polynom>)" i "Skriv inn"-feltet, og <Polynom> bytter du ut med navnet til funksjonen du ønsker å finne topp og/eller bunnpunkt til, i vårt eksempel er det f, slik:



Da får du eventuelle topp- og bunnpunkter til funksjonen din, slik:



Her vil A-punktet være et toppunkt (1.57, 23.45) og B et bunnpunkt (5.1, 12.48).

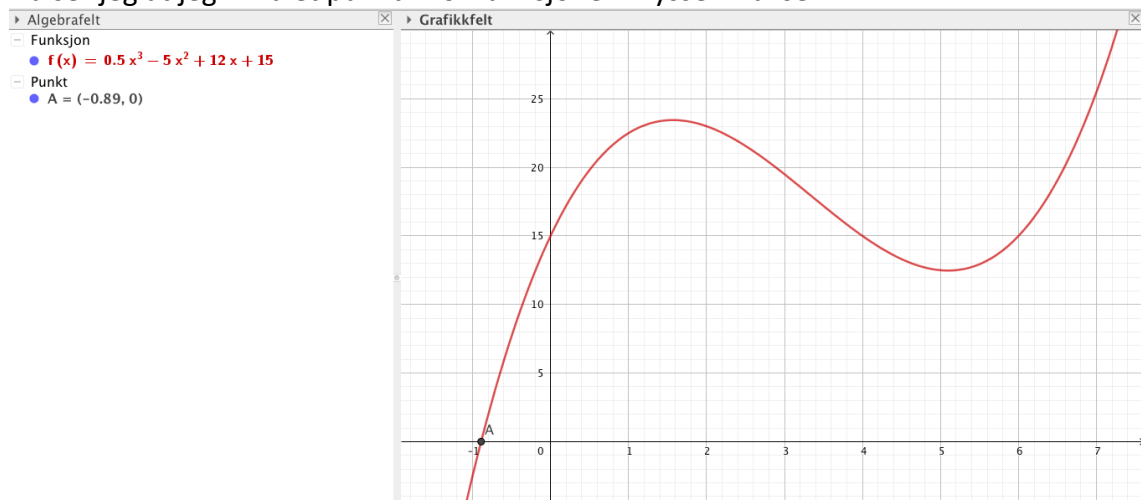
### 9. Nullpunkter (eller når verdien til funksjonen er lik null)

Bli du bedt om å finne nullpunkter eller når verdien til funksjonen er lik null skal du bruke kommandoen "Nullpunkt( <Polynom> )", hvor du nok en gang bytter ut <Polynom> med navnet til funksjonen, i vårt tilfelle f. Da vil du finne de stedene hvor funksjonen vår krysser x-aksen.

Det er bare et problem med det eksempelet jeg har brukt til nå, og det er at når vi ser på den funksjonen mellom x-verdiene 0 og 7, så vil funksjonen aldri krysse x-aksen, men la oss for det siste eksempelet nå tegne funksjonen igjen for alle x-verdier (slik som vi gjorde i aller første eksempel på side 1). Deretter skriver jeg inn kommandoen min i GeoGebra:

Skriv inn:

Da ser jeg at jeg vil få et punkt hvor funksjonen krysser x-aksen:



I punktet A er x-verdien lik null, så i dette tilfellet har funksjonen et nullpunkt når x-verdien er -0,89. Da er selvfølgelig tilhørende y-verdi lik 0.



## 10. Statistisk analyse med GeoGebra

Vi kan bruke regnearket i GeoGebra til å gjøre en statistisk analyse av en variabel, for å finne **gjennomsnitt, median, nedre- og øvre kvartil, samt standardavvik**. Det første du må gjøre er å åpne regnearket i GeoGebra. Dette finner du ved å klikke på menyen, øverst til høyre, velg «Vis» og deretter «Regneark».

Deretter må du liste opp datasettet du ønsker å gjøre analysen av som en lang liste av enkle observasjonsverdier. Er de allerede listet opp i oppgaven, er det enkelt, da skriver du denne listen inn i regnearket.

Hvis de derimot er listet opp i en frekvenstabell er det enkleste å telle hvor mange du har av hver observasjon og liste et tilsvarende antall i regnearket.

Eksempel på frekvenstabell:

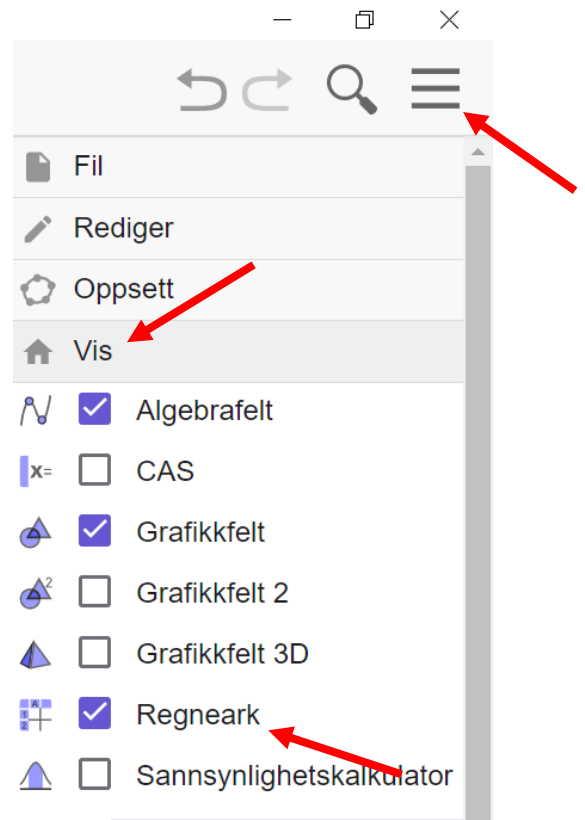
Antall søsken	Frekvens
0	3
1	6
2	2

La oss sette disse inn i regnearket. Da ser jeg, ut ifra frekvenstabellen min, at jeg må ha tre nuller, seks enere og to toere i listen min, slik som dette:

A	
1	0
2	0
3	0
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	2
11	2

Etter dette, marker alle tallene.

	A	B
1	0	
2	0	
3	0	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
10	2	
11	2	
12		

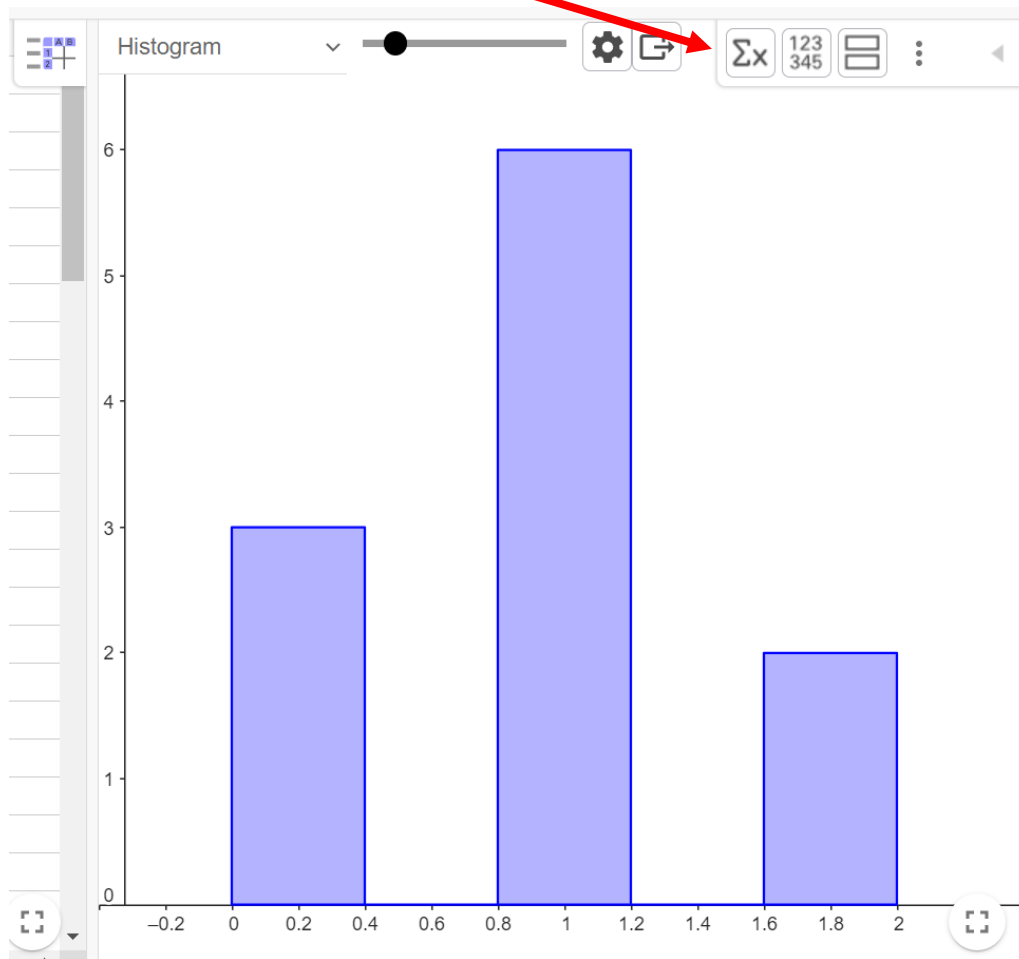
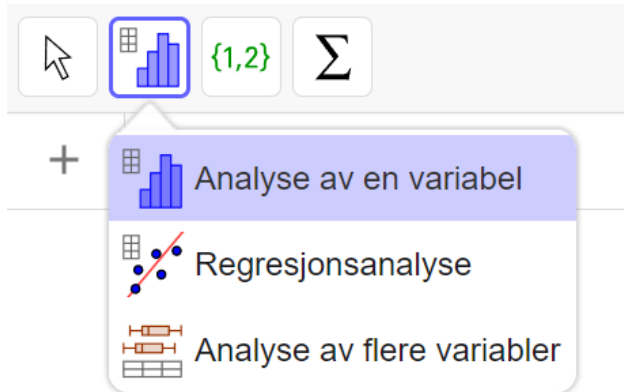


Klikk så på andre verktøyfane øverst til venstre på skjermen, og velg «Analyse av en variabel».

Da vil du få opp et nytt vindu i Geogebra, hvor du nå trolig vil få opp noen søyler, som et histogram.

For å få opp selve analysen klikker du til slutt på sigma-x-ikonet øverst til høyre i vinduet du nettopp fikk.

GeoGebra klassisk



Når du klikker på denne vil du få opp den statistiske analysen.

s = standardavvik

Q1 = Nedre kvartil

Q3 = Øvre kvartil

Statistikk	
n	11
Gjennomsnitt	0.9091
$\sigma$	0.668
s	0.7006
$\Sigma x$	10
$\Sigma x^2$	14
Min	0
Q1	0
Median	1
Q3	1
Maks	2



## Funksjoner du må kjenne igjen

Når det kommer til å bruke GeoGebra må man også kunne kjenne igjen enkelte funksjoner. Enten ut ifra hvordan de ser ut eller ut ifra hva funksjonsuttrykket til funksjonen er.

Det er fire funksjoner man må kjenne igjen i P-matte: lineære funksjoner, polynomfunksjoner, eksponentielle funksjoner og potensfunksjoner.

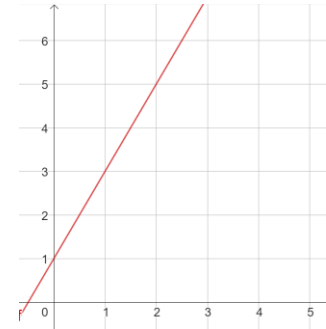
### **Lineære funksjoner**

Dette er de enkleste og funksjonene er kun rette linjer.

Funksjonsuttrykk:  $f(x) = ax + b$

Hvor **a** er **stigningstallet** som forteller oss hvor stor forandring vi har i y-verdien til funksjonen per én økning i x-verdien.

Konstantleddet **b** forteller oss hvor funksjonen krysser y-aksen.



I eksempelet er stigningstallet 2 og konstantleddet 1, så funksjonen blir:

$$f(x) = 2x + 1$$

### **Polynomfunksjoner**

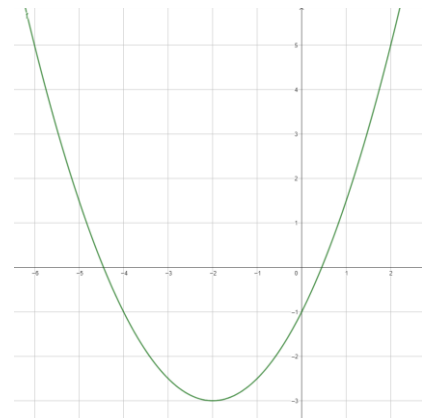
Dette er funksjoner med svinger på seg. Funksjonene vil alltid ha en sving mindre enn graden på polynomet (med grad tenker vi på hva den største eksponenten til x er i uttrykket).

2. grad: Funksjonen vil ha én sving, og krysser y-aksen i **c**, for det generelle uttrykket.

Funksjonsuttrykk:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

Eksempel:

$$f(x) = 0,5x^2 + 2x - 1$$



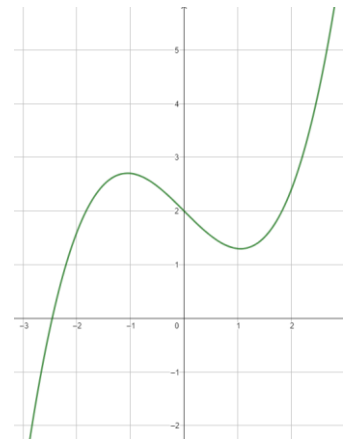
3. grad: Funksjonen vil ha to svinger, og krysser y-aksen i **d**, for det generelle uttrykket.

Funksjonsuttrykk:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Eksempel:

$$f(x) = 0.3x^3 - 3x + 2x + 2$$

Dette mønsteret kan man fortsette å følge for 4. grad, som vil ha tre svinger, 5. grad, som vil ha fire svinger, osv...

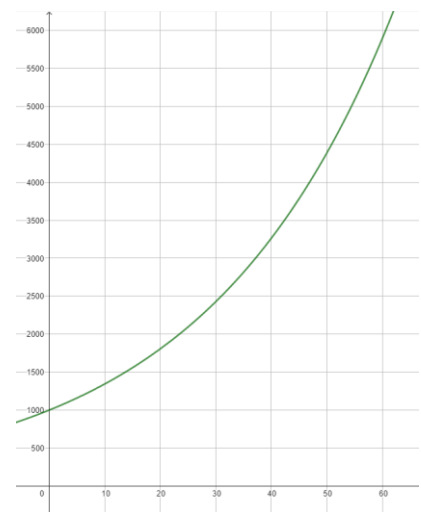


### Ekspontielle funksjoner

Dette er kanskje den gruppen funksjoner det er viktigst å kjenne til hva de ulike verdiene i funksjonsuttrykket betyr. Grunnen til dette er at eksponentielle funksjoner er prosentvis endring over flere perioder, noe som går igjen på eksamen hvert eneste år.

Funksjonsuttrykk:  $f(x) = a \cdot b^x$

Hvor **a** er startverdien for når du starter den prosentvise endringen (og også verdien hvor funksjonen krysser y-aksen), **b** er vekstfaktoren til den prosentvise stigningen (husk:  $Vekstfaktor = 1 \pm$  Prosentfaktoren til økningen/nedgangen), mens **x** er antall perioder du ønsker å regne framover i tid.



Eksempel: Du setter 1000 kr inn i banken med en rente på 3 % per år.

$$f(x) = 1000 \cdot 1.03^x$$

### Potensfunksjoner

Kan likne på eksponentialfunksjoner i utseende, men eksponentialfunksjoner vil aldri gå igjennom origo, noe potensfunksjoner kan.

Funksjonsuttrykk:  $f(x) = a \cdot x^b$

Merk: For funksjonsuttrykket har **x** og **b** byttet plass, sammenliknet med eksponentialfunksjoner.

**a** og **b** har dessverre en mye mindre praktisk tolkning enn det leddene i andre funksjoner har.

